

TC: inmersión y encaje Euclidianos de $\mathbb{R}P^n$

" TC está motivada por consideraciones en robótica, pero captura información adicional " "

En la categoría de variedades y funciones suaves $f: M^m \rightarrow N^n$

— inmersión = $T_M \xrightarrow{df} T_N$

— encaje = inmersión + encaje topológico.

$In(M) = \min \{ n : \exists \text{ inmersión } M \hookrightarrow \mathbb{R}^n \}$ = ??

$En(M) = \text{encaje}$
(“complejidad de M ”)

Ejemplos

$$\operatorname{In}(S^m) = \operatorname{En}(S^m) = m+1$$

$$\operatorname{In}(P^2) = 3 \quad \text{--- superficie de Boy}$$

$$\operatorname{En}(P^2) = 4$$

$$P^m = S^m / \pm \quad ??$$

Teorema 1 (Farber-Tabachnikov-Yuzvinsky, 2003)

$$\operatorname{TC}(P^m) = \operatorname{In}(P^m) \quad \text{para } m \neq 1, 3, 7$$

(P^1, P^3, P^7) son paralelizables con $\operatorname{TC} = \dim$)

Teorema 2 (G-Landweber, 2009 ; Dominguez, 2012)

$$\operatorname{TC}^S(P^m) = \operatorname{En}(P^m) \quad \text{para } m \neq 6, 7, 11, 12, 14, 15$$

PORTE 1: Ingrediente 1.

Def dimension geométrica de un haz vectorial $\xi \rightarrow X$

$$\text{dg}(\xi) = \min \left\{ k : \exists \alpha^{(k)} \rightarrow X \text{ con } \xi \underset{\text{est.}}{\simeq} \alpha \right\}$$

Ejemplo: El haz normal ν_M de M^m tiene $\text{dg}(\nu_M) \leq k$
si $M^m \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^{m+k}$

Teorema (Hirsch 1959)

$$M^m \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^{m+k} \iff \text{dg}(\nu_M) \leq k$$

Ingrediente 2

Teorema (Adem-Gitter-James 1972)

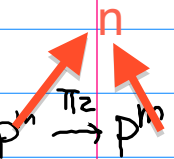
$$P^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n \iff \exists \text{ axial } P^m \times P^m \rightarrow P^n$$

si $n > m$

Bosquejo (para la ida) :

$$P^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow (\tau_{P^m} \oplus \nu = n) \oplus 1$$

$$\Rightarrow (m+1) \sum_m \oplus \nu = n+1 \Rightarrow$$

$$P^m \times P^m = P\left(\sum_{\frac{n}{2}}^m \mathbb{R}^{m+1}\right) = P\left((m+1) \sum_m\right) \hookrightarrow P(n+1) = P^m \times P^m \xrightarrow{\pi_2} P^n$$


es axial en el factor lineal y trivial en la diagonal

(Para el regreso) :

$$\begin{array}{ccc}
 S^m \times_{\mathbb{Z}/2} S^m & \xrightarrow{\mathbb{Z}/2} & S^n \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 P^m \times P^m & \xrightarrow{\text{axial}} & P^n
 \end{array}
 \rightsquigarrow
 \begin{array}{ccc}
 S^m \times_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{R}^{m+1} & \xrightarrow{\text{"}\mathbb{Z}/2\text{-skew" }} & P^m \times \mathbb{R}^{n+1} \\
 \parallel & \simeq & \parallel \\
 1 + \mathbb{Z}_{P^m} & \hookrightarrow & n+1
 \end{array}$$

- Los tres casos especiales $m=1,3,7$ tienen $P^m \times P^m \rightarrow P^m$,
 pero $P^m \not\rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ es óptima (paralelizabilidad)

Ingrediente 3

Teorema (Farber - Tabachnikov - Yuzvinsky, 2003)

$$\text{tc}(P^m) = \min \left\{ n : \exists \text{ axial } P^m \times P^m \rightarrow P^n \right\} \quad \forall n$$

$$I. \quad TC(p^m) = \text{secat}(e_{01}) \geq \text{secat}(S(\xi_m \otimes \xi_m))$$

$$\begin{array}{ccc} \delta \longmapsto & \overline{(\delta(0), \delta(1))} & \\ (p^m)^{[0,1]} & \longrightarrow & S^m_x S^m \\ e_{01} \searrow & & \swarrow \\ & p^m \times p^m & \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \pm \tilde{\delta} & \nearrow & S^m \\ [0,1] & \xrightarrow{\delta} & p^m \end{array} \right]$$

$$II. \quad \text{secat}(S(\eta)) \stackrel{\text{red}}{\geq} \min \{ n \mid (n+1)\eta \text{ admite sección nula cero} \}$$

$$\begin{array}{ccc} s_i & \nearrow & \eta \\ & \downarrow & \\ U_i \subset & \hookrightarrow & B \end{array} \quad \left[\begin{array}{c} \text{ext a } B \\ \text{como } = 0 \\ \text{fibre de } U_i \end{array} \right]$$

$i=0, \dots, s$ =secat(S(\eta))

$$\text{III} \quad \text{TC}(P^m) \cong \min \{ n : \exists \text{ axial } P^m \times P^m \rightarrow P^n \}$$

$$n = \text{TC}(P^m) \Rightarrow (n+1) \sum_m \otimes \sum_m = 1 \oplus \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccc} & & S^n & \equiv & S^n \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & P^n & \xrightarrow{\tau_{P^n}} & \text{BO}(n) \\ & \nearrow \alpha' & \downarrow & & \downarrow \\ P^m \times P^m & \xrightarrow{\sum_m \otimes \sum_m} & P^\infty & \xrightarrow{(n+1) \sum_m} & \text{BO}(n+1) \end{array}$$

IV Una axial $P^m \times P^m \rightarrow P^n$ determina un SPM-L con $n+1$ planeadores locales.

$$\overbrace{\quad\quad\quad}^{\psi_i}$$

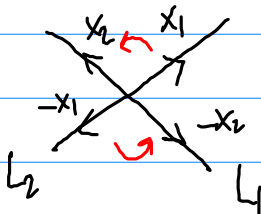
$$\overbrace{\quad\quad\quad}^{\mathbb{Z}/2\text{-equiv}}$$

$$S^m \times S^m \rightarrow S^m \times_{\mathbb{Z}/2} S^m \xrightarrow{\mathbb{Z}/2\text{-equiv}} S^h \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{R} \quad \lambda = j \cdots j^n$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$P^m \times P^m \xrightarrow{\text{axial}} P^h$$

$$U_i = \left\{ (L_1, L_2) \mid L_1 \neq L_2 \wedge \psi_i(x_1, x_2) \neq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in L_1 \times L_2 \right\}$$



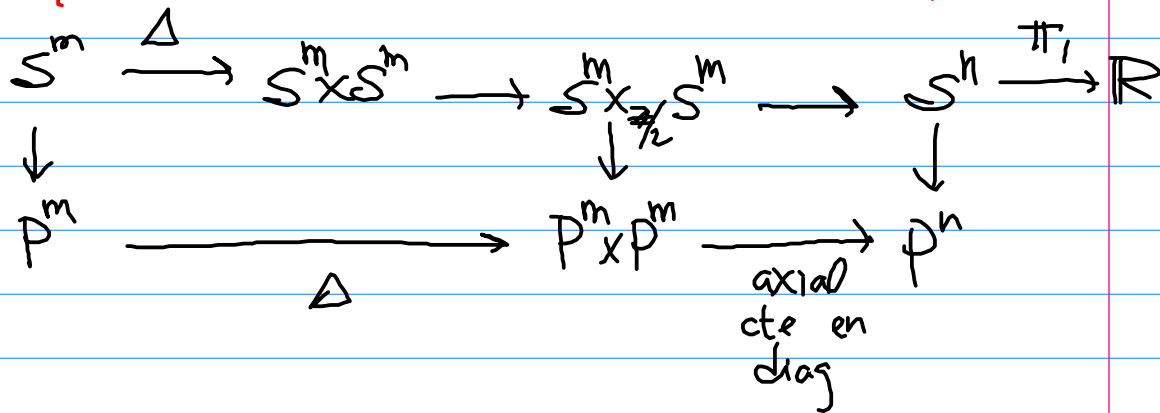
$$\psi(x_1, x_2) = \psi(-x_1, -x_2) > 0$$

Los $U_1, \dots, U_{n+1}$ cubren a $P^m \times P^m$ - diagonal. Para incluir la diagonal en, digamos, U_i necesitamos poder asegurar que P_i sea positiva en la diagonal. Para $m=1,3,7$ esto se logra directamente con axiales que surgen de las multiplicaciones $P^{m+1} \times P^{m+1} \rightarrow P^{m+1}$. De otro modo se debe tener $n > m$ en cualquier axial $P^m \times P^m \rightarrow P^n$ y notamos de

$$\begin{array}{ccc}
 & P^m \times P^m & \xrightarrow{\text{axial}} P^n \\
 \text{diagonal} & \uparrow & \nearrow \\
 (\text{cofib}) & P^m & \xrightarrow{\sim}
 \end{array}$$

que el tal axial se puede deformar a uno estrictamente constante en la diagonal. Tendríamos:

$\therefore$ cte (con valor $(1, 0, \dots, 0)$ salvo un giro)



Nota " $TC(p^n) = I_n(p^n) = ??$ vs. $TC(\mathbb{F}p^n) = 2n$ "

$$TC \left(\begin{array}{c} p^{2n+1} \rightarrow L^{2n+1}(4) \rightarrow L^{2n+1}(8) \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{F}p^n \\ \text{difícil} \leftarrow \qquad \qquad \qquad \rightarrow \text{fácil} \end{array} \right) = ??$$

Proposición (Farber-Grant, G-Landweber)

$$TC(L^{2n+1}(2^e)) = \begin{cases} 4n+1, & \text{si } e > \alpha(n) \\ 4n-1, & \text{si } e = \alpha(n) \\ \leq 4n-1, & \text{si } e \leq \alpha(n) \end{cases}$$

Conjetura $TC(L^{2n+1}(2^e))$ disminuye "aproximadamente" en 2 cada vez que e baja en 1, i.e.

$$\leadsto I_n(p^{2n+1}) \sim 4n - 2\alpha(n) + 1 \quad (\text{cf. Davis})$$

Estrategia :

mismos métodos descritos antes

Teorema (G, 2005)

$$\left\lceil \frac{TC(L^{2n+1}(2^e))}{2} \right\rceil = \min k \text{ para el cual hay } S^{2n+1} \times S^{2n+1} \rightarrow S^{2k+1}$$

que sea $\mathbb{Z}/2^e$ -biregular.

Objetivo :

Construir $S^{2n+1} \times S^{2n+1} \rightarrow S^{2k+1}$ $\mathbb{Z}/2^{e-1}$ -biregular
a partir de $S^{2n+1} \times S^{2n+1} \rightarrow S^{2k+1}$ $\mathbb{Z}/2^e$ -biregular.

i.e. probar $s(n, e+1) \leq s(n, e) + 1$

PARTIE 2: TC^S vs En en $\mathbb{RP}^m$

Def: $\mathbb{Z}/2 \curvearrowright X$ involution principal τ

$$\begin{aligned} \text{nivel}(X; \tau) &= \min \left\{ n : \exists X \rightarrow S^n \text{ } \mathbb{Z}/2\text{-equiv} \right\} \\ &= \min \left\{ n : \begin{array}{c} X \\ \downarrow \tau \\ X/\tau \end{array} \text{ se clasifica de } \begin{array}{c} S^n \\ \downarrow \tau \\ P^n \end{array} \right\} \\ &= \text{secat}(X \rightarrow X/\tau) \end{aligned}$$

Schwarz
(Milnor contr)

Teorema (G-Landweber, 2009)

$$TC^S(P^m) = \text{nivel}(F(P^m, 2); \text{intercambio de ejes}) + 1$$

Relación con E_n :

$$M^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \underbrace{M \times M - \Delta_M \xrightarrow{H} S^{n-1}}_{\mathbb{Z}/2\text{-equivariante}}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{|f(x) - f(y)|}$$

$$\therefore E_n(M^m) \geq \text{nivel}(FC(M, \mathbb{Z}/2), \sigma) + 1.$$

Teorema (Haefliger, 1962) . (ok en P^m si $m \geq 16$)

$$\text{Igualdad si } E_n(M^m) \geq \frac{3}{2}(m+1).$$

Argumento básico:

$E_0(P^m) \not\subset F(P^m, 2) \rightarrow B(P^m, 2)$ tienen secat igual

$$\begin{array}{ccc}
 (P^m)^{[0,1]} & \xrightarrow{\ell} & S^m \times_{\frac{\pi}{2}} S^m \\
 \downarrow E_0 & \swarrow \pi & \\
 P^m \times P^m & &
 \end{array}
 \quad \equiv \quad
 \begin{array}{ccc}
 L(P^m)^c & \xrightarrow{\ell} & S^m \times S^m - \Delta - \Delta' \\
 \downarrow & \swarrow & \\
 F(P^m, 2) & &
 \end{array}
 \quad \frac{}{(x,y) \sim (-x,-y)}_{\delta}$$

El segundo diagrama:

- es σ -equivariante (σ = "switching")
- admite un morfismo σ -equivariante de regreso

Consecuentemente:

Lema

$$\text{secat}(\mathcal{E}_{01}) = \text{secat} \left(\begin{array}{c} S^m \times S^m - \Delta - \Delta' / \delta, \sigma \\ \downarrow \\ B(\mathbb{P}^m, 2) \end{array} \right)$$

Necesitamos pues:

Lema

$$\text{secat} \left(\begin{array}{c} S^m \times S^m - \Delta - \Delta' / \delta, \sigma \\ \downarrow \\ B(\mathbb{P}^m, 2) \end{array} \right) = \text{secat} \left(\begin{array}{c} F(\mathbb{P}^m, 2) \\ \downarrow \\ B(\mathbb{P}^m, 2) \end{array} \right)$$

Dem:

Ambas son $\mathbb{Q}/2$ -coberturas principales, así que basta dar la igualdad en términos de los niveles:

$$F(\mathbb{P}^m, 2) = S^m \times S^m - \Delta - \Delta' / \lambda, \sigma \xrightarrow{\sigma} B(\mathbb{P}^m, 2)$$

$$\begin{array}{c} \textcolor{red}{\updownarrow} \sigma \\ S^m \times S^m - \Delta - \Delta' / \delta, \sigma \xrightarrow[\lambda=\delta]{} B(\mathbb{P}^m, 2) \end{array}$$

$$(x, y) \xrightarrow{\phi} (v(x+y), v(x-y)) \doteq (a, b)$$

$$\lambda \cdot (x, y) = (-x, y) \rightarrow (v(y-x), -v(x+y)) = \delta \Gamma \cdot (a, b)$$

$$\rho \cdot (x, y) = (x, -y) \rightarrow (v(x-y), v(x+y)) = \sigma \cdot (a, b)$$

$$\lambda \rho \cdot (x, y) = (-x, -y) \rightarrow (-v(x+y), v(y-x)) = \delta \cdot (a, b)$$

bien
definido

$$\sigma \cdot (x, y) = (y, x) \rightarrow (v(x+y), -v(x-y)) = \rho \cdot (a, b) \quad \} \text{ } \mathbb{Z}_2\text{-equiv}$$

$\varepsilon_0 \geq$ en lema.

$$(x, y) \xrightarrow{\phi} (v(x+y), v(x-y)) \doteq (a, b)$$

$$\delta \cdot (x, y) = (-x, -y) \rightarrow (-v(x+y), -v(x-y)) = \lambda p \cdot (a, b)$$

$$\sigma \cdot (x, y) = (y, x) \rightarrow (v(x+y), -v(x-y)) = p \cdot (a, b)$$

$$\delta\sigma \cdot (x, y) = (-y, -x) \rightarrow (-v(x+y), v(x-y)) = \lambda \cdot (a, b)$$

$$\lambda \cdot (x, y) = (-x, y) \rightarrow (-v(x-y), -v(x+y)) = \sigma(\lambda p(a, b))$$

} bien
definido

} $\mathbb{Z}/2$ -
equiv.

$\varepsilon_0 \leq$ en lema.

Nota Se han mencionado como únicas posibles excepciones a $TC^S(p^m) = E_n(p^m)$ los valores $m = 6, 7, 11, 12, 14, 15$

Posible estrategia (ha funcionado para $m=35$):

Se ha visto que en cualquier caso

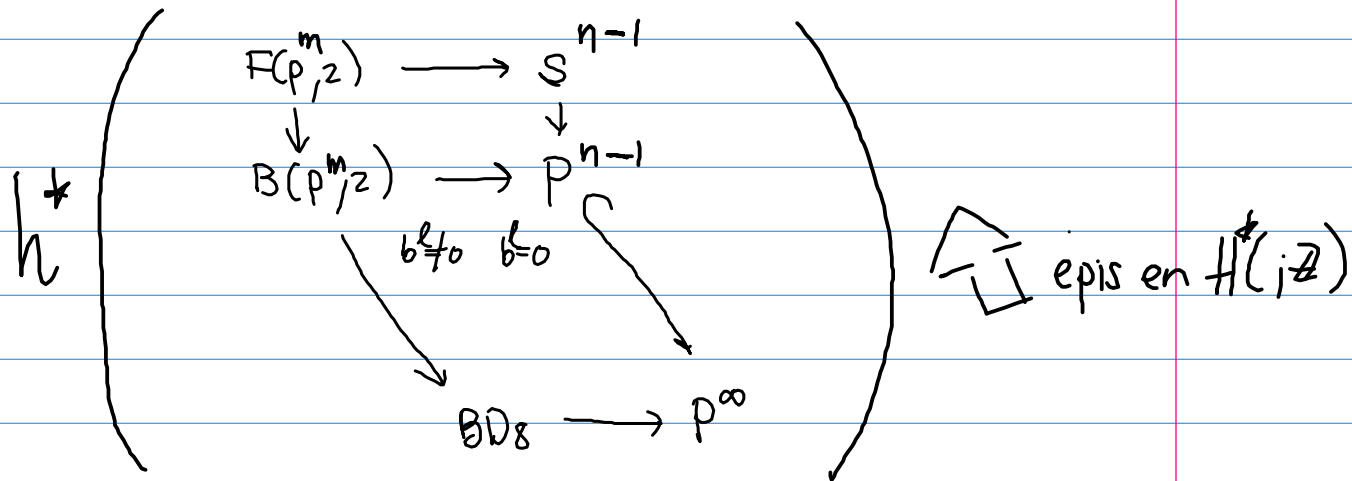
$$E_n(p^m) \geq TC^S(p^m) = 1 + \text{nivel}(F(p^m/2), \sigma)$$

así que cotas inferiores para $TC^S(p^m)$ podrían dar información nueva sobre $E_n(p^m)$.

↙ primer caso no conocido

$$\text{Ejemplo: } 9 \leq TC^S(p^7) \leq 10 \quad \nleftrightarrow \quad 9 \leq E_n(p^7) \leq 12$$

Método: Para descartar $TC^S(p^m) \leq n$
 ce nivel $(F(p^m/2), \sigma) < h$:



Objetivo: Entender la AHSS para $F \rightarrow B(p^m/2) \rightarrow BD_8$

Nota: $F = V_{2, m+1} \hookrightarrow D_8 = \left\langle \sigma, \lambda, \rho : \begin{array}{l} \sigma\lambda = \rho\sigma \\ \lambda^2 = \rho^2 = \sigma^2 = e \\ \lambda\rho = \rho\lambda \end{array} \right\rangle$

Teorema (Dominguez, 2012)

El elemento relevante $b \in H^2(B(P^m, \mathbb{Z}); \mathbb{Z})$ tiene

$$\min \{ l : b^l = 0 \} = \begin{cases} 2^e & \text{si } m = 2^e \\ 2^e + 1 & \text{si } 2^e < m < 2^{e+1} \end{cases}$$

Ejemplos

$m=3$: $4 \leq TC^S(P^3) \leq 5$ $\nleftarrow$ $En(P^3) = 5$
 $\uparrow$ se descarta pues en $B(P^3, \mathbb{Z}) \rightarrow P^3$
 $b^2 \neq 0$ $b^2 = 0$

$m=5$: $8 \leq TC^S(P^5) \leq 9$ $\nleftarrow$ $En(P^5) = 9$
 $\uparrow$ se descarta pues en $B(P^5, \mathbb{Z}) \rightarrow P^7$
 $b^4 \neq 0$ $b^4 = 0$

NOTAS :

- Esto mismo da $TC^S(p^6) = 9$
Pero ahora sólo se sabe $En(p^6) \in \{9, 10, 11\}$
Este es el primer caso en que no se sabe si $TC^S = En$

- El método falla para n 's mayores con $h^* = H^*(; \mathbb{Z})$ — las alturas de los b 's simplemente crecieron muy poco

Proyecto: usar otras h^* 's, por ejemplo alguna versión de K -teoría.

Pregunta : ¿ Qué tiene de especial P^n para que ?
 $TC = In \quad \& \quad TC^S = En$

Ejemplo : $TC(S^m) \leq TC^S(S^m) = 2$ pero
 $In(S^m) = En(S^m) = m+1$

Respuesta parcial : Al menos no ser 1-conexas
(de otro modo $TC \leq \dim$ & $TC^S \leq \dim+1$)

Sin embargo hay otras familias de variedades, no 1-conexas
pero cercanas a las P^n 's para las cuales NO
se tiene relación directa (sección 5).