SESIÓN 1

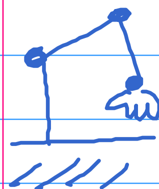
Farber's (2002) $TC(X) = \mathrm{secat}\left(\begin{tikzcd} X^{[0,1]} \arrow[r, "ev_{0,1}"] & X \times X \arrow[l, bend right, dashed, "s"'] \end{tikzcd}\right)$

Robótica (planeación motriz) $\Big<$ en tiempo real / por adelantado ✓

X = estados de un robot

$X \times X$ = pares de estados (inicial–final)

$X^{[0,1]}$ = transformaciones del robot



sección s = planeadores motrices (continuos : a prueba de errores)

Ejemplo: Si X es contráctil entonces existe planeador motriz continuo s.

De hecho la existencia de un planeador continuo s sólo se dá cuando X es contráctil: plan motriz de cualquier punto a uno fijo.

SOLUCION

Género de Schwarz (categoría seccional, secat):

$$\operatorname{secat}(p: E \to B) = m - 1$$

$$m = \min \left\{ r : \begin{array}{l} B = A_1 \cup \cdots \cup A_r, \quad A_i = \mathring{A}_i \subseteq B \\ \exists s_i : U_i \to E \text{ sección local salvo homot} \end{array} \right\}$$

Ejemplo: B conexo $\Rightarrow \mathrm{cat}(B) = \mathrm{secat}(b_0 \hookrightarrow B)$

$\mathrm{cat}(M = \text{variedad suave}) < \#$ puntos críticos de cualquier función suave $M \to \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Invariante homotópico.

Def: • $TC(X) = \mathrm{secat}(X^{[0,1]} \xrightarrow{e_{01}} X \times X)$

• Sistema de planeadores motores locales:

$$\{(A_i, s_i) : X \times X = \bigcup A_i, \ s_i : U_i \to X^{[0,1]} \ \text{sec}\}$$

• TC da info sobre cualquier tal sistema:

ALGORITMOS $\rightsquigarrow$ orden de inestabilidad.

Objetivo: Teoría y cálculo de TC

Ejemplos:

- $TC(\text{conjunto convexo de } \mathbb{R}^n) = 0$
- $TC(X) = 0 \iff X$ contráctil,
- $cat(X) \leq TC(X) \leq cat(X \times X)$:

$x_0 \in X$ fijo.

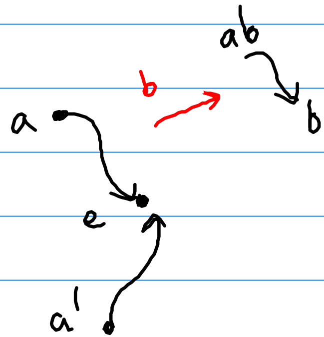
$$X \hookrightarrow X \times X, \quad x \longmapsto (x, x_0)$$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} C([0,1], 0; X, x_0) \arrow[r, hook] \arrow[d] & X^{[0,1]} \arrow[d] \\ X \arrow[r, hook] & X \times X \end{tikzcd}$$

<u>Nota</u>: $TC = \mathrm{cat}$ para grupos topológicos

(mas generalmente, para grupos topológicos salvo homotopía — H-espacios: Lupton-Scheerer 2011)

razón: G es homogéneo:



Formalmente:

- G: gpo topológico $= A_1 \cup \cdots \cup A_r$, A_i abierto contráctil

- $$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[rr, "xy^{-1}"] & & G \\ B_i \arrow[u, hook] \arrow[rr, hook] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow"] & & A_i \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

  $\Rightarrow$ B_i abiertos que cubren a $G \times G$

- $h_i : A_i \times [0,1] \longrightarrow G$ homotopía de contracción

  $h_i(\ , 0) = \text{incl.}$

  $h_i(\ , 1) = e \in G$ (neutro)

- $s_i : B_i \times [0,1] \longrightarrow G$, $s_i(a,b,t) = h_i(ab^{-1}, t)\, b$

Ejemplos:

$$\underset{\displaystyle 1}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{cat}(S^n)}} \leq \underset{\displaystyle ¿1,2?}{\underset{\shortparallel}{TC(S^n)}} \leq \underset{\displaystyle 2}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{cat}(S^n \times S^n)}}$$

(objetivo inmediato)

Métodos de cálculo más exitosos hasta el momento (cat)

$$\text{cup-length}(X) \leq \operatorname{cat}(X) \leq \frac{\operatorname{hdim}(X)}{\operatorname{conn}(X)+1}$$

= máxima cantidad de clases de cohomología reducida de X con producto $\neq 0$.

Lema: $F \to E \xrightarrow{p} B$ fibración

$$\mathrm{secat}(p) \leq \frac{\mathrm{hdim}(B)}{2 + \mathrm{conn}(F)}$$

Se verá como parte de las ideas de la sesión 4 (teoría clásica de obstrucciones en teoría de homotopía).

En el caso bajo consideración la fibración relevante es $\Omega X \to * \to X$

Lema Si $x_1,\dots,x_n \in \bar{H}^*(X)$ con $x_1\cdots x_n \neq 0$ entonces $\operatorname{cat}(X) \geq n$

Si $X = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ $\left(k = \operatorname{cat}(X)+1\right)$
A_i abierto contráctil en X
con $k \leq n$, entonces

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \hookrightarrow & X & \hookrightarrow & (X, A_i) \\ 0 & \longleftarrow & x_i & \longleftarrow & y_i \end{array}$$

$$0 \neq x_1\cdots x_k \longleftarrow y_1\cdots y_k \neq 0$$

$$(X, \cup A_i = X)$$

<u>Discusión</u> $TC(S^n) = \begin{cases} 1; & n \text{ impar} \\ 2; & n \text{ par} \end{cases}$

(por ejemplo: S^1, S^3, S^7 que son H-espacios)

<u>n impar</u>: $v: S^n \to S^n$ campo tangente.

S_1 = movimiento a través de geodésicas en
$$U_1 = \{(a,b) \in S^n \times S^n \mid a \neq -b\}$$

S_2 = movimiento primero al antipodal via v y luego por geodésicas en
$$U_2 = \{(a,b) \in S^n \times S^n \mid a \neq b\}$$

<u>Discusión</u> $TC(S^n) = \begin{cases} 1; & n \text{ impar} \\ 2; & n \text{ par} \end{cases}$

(por ejemplo: S^1, S^3, S^7 que son H-espacios)

<u>n par</u>: $zcl(X) \leq TC(X)$

= máxima cantidad de clases de cohomología en el núcleo de $X \hookrightarrow X \times X$ con producto $\neq 0$

En $H^*(S^n \times S^n) = \Lambda_{\mathbb{Z}}(x \otimes 1, 1 \otimes x)$

$(1 \otimes x - x \otimes 1)^2 = -2\, x \otimes x \neq 0$

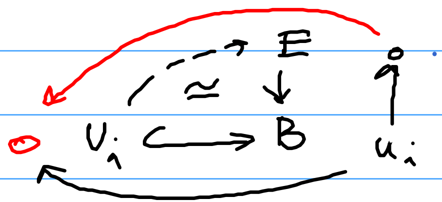
Para concluir la discusión acerca de $TC(S^n)$, resta por argumentar la desigualdad

$$zcl \leq TC$$

<u>Def</u>: Para $p: E \to B$,

$cl(p)$ = máxima cantidad de clases de cohomología en el núcleo de p^* con producto $\neq 0$

<u>Lema</u>: $$cl(p) \leq secat(p) \leq \frac{hdim(Base(p))}{2 + conn(Fibra(p))}$$



Ejemplo: $M =$ variedad cerrada simplectica 1-conexa.

$$\mathrm{zcl}(M) \leq TC(M) \leq \frac{2\dim(M)}{1+\mathrm{conn}(M)} = \dim(M)$$

$\downarrow$

$= \dim M$ pues, con coeficientes reales, la 2-forma no degenerada de M, ω, satisface

$$\omega^{\dim M} \neq 0$$

Caso de interes en la próxima sesión: $TC(\mathbb{CP}^n) = 2n$

- $TC(X)$ sólo depende del tipo de homotopía de X

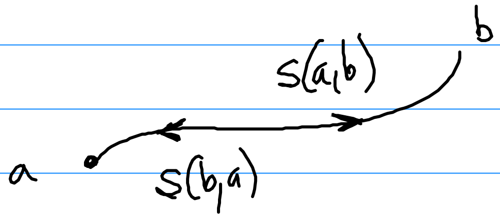
- Subaditivo en productos: $TC(X\times Y) \leq TC(X)+TC(Y)$
  Mas generalmente, Schwarz probó:
  $$\operatorname{secat}(p\times q) \leq \operatorname{secat}(p)+\operatorname{secat}(q)$$

- Comportamiento en fibraciones y cofibraciones
  Por ejemplo $\operatorname{cat}(E) < (\operatorname{cat}(B)+1)(\operatorname{cat}(F)+1)$,
  Pero NO se conoce una situación similar para TC

- En el caso orientado $TC(\Sigma_g) = \begin{cases} 2, & g=0,1 \\ 4, & g\geq 2 \end{cases}$.
  Pero no se conoce ningún $TC(\Sigma_g)$ con Σ_g no orient.
  Decidir $3 \leq TC(\text{Klein}) \leq 4$

- $TC(X) = \operatorname{cat}(X\times X/\text{diag})$ se conoce en muchos casos.
  No hay prueba general ni contraejemplos.

Variantes (<u>Eficiencia</u>) en la Planeación Motriz



$$\begin{tikzcd} X^{[0,1]} \arrow[d, "e_{01}"'] & \\ X \times X & U \arrow[l, hook'] \arrow[ul, "s"'] \end{tikzcd}$$

I. $s(a,b)(t) = s(b,a)(1-t)$

II. $s(a,a)(t) = a$

<u>Def</u> Un S.P.M.L $\{(U_i, s_i)\}$ es eficiente si

- cada U_i es cerrado bajo el intercambio de ejes.
- cada s_i satisface las condiciones I y II.

$$\begin{tikzcd}
X^{[0,1]} \arrow[d, "e_{01}"'] & L(X)^c \arrow[l, hook'] \arrow[r] \arrow[d, "e_{01}"'] & L^{\circ}(X) \arrow[d, "\varepsilon_{01}"'] \\
X \times X & F(X,2) \arrow[l, hook'] \arrow[r] & B(X,2)
\end{tikzcd}$$

$L^{\circ}(X) =$ caminos no cerrados y no orientados

$$TC^S(X) := \operatorname{secat}(\varepsilon_{01}) + 1$$

plan motriz al rededor de la diagonal determinado por II

<u>Obs</u>: $TC(X) \leq TC^S(X)$

— ¿TC^S es invariante homotópico?

— ¿$TC^S(X) = 1 \iff X$ contráctil?

<u>Problema</u>: Topología (homotopía) de $B(X,2)$ = ??

$$\begin{tikzcd}
X^{[0,1]} \arrow[d, "e_0"'] & L(X)^c \arrow[l, hook'] \arrow[r] \arrow[d, "e_{01}"'] & L^o(X) \arrow[d, "\varepsilon_{01}"'] \\
X \times X & F(X,2) \arrow[l, hook'] \arrow[r] & B(X,2)
\end{tikzcd}$$

$L^o(X) =$ no-lazos no orientados

<u>Obs</u>: $e_{01}, e_{01}, \varepsilon_{01}$ comparten la misma fibra homotópica: ΩX

<u>Cor</u>: $TC^S(X) \leq 1 + \dfrac{\mathrm{hdim}(B(X,2))}{1 + \mathrm{conn}(X)}$ = ??

Caso de $X = S^n$ (Farber-Grant)

$$S^n \overset{i}{\hookrightarrow} F(S^n, 2) \xrightarrow{r} S^n$$
$$x \longmapsto (x, -x)$$
$$(x, y) \longmapsto \frac{x-y}{|x-y|}$$

<u>Lema</u>: equivalencias homotópicas $\mathbb{Z}/2$-equivariantes

<u>Corolarios</u>

- $B(S^n, 2) \simeq P^n$
- Con $\Omega S^n \longrightarrow L^0(S^n) \xrightarrow{\varepsilon} B(S^n, 2)$

  $TC^s(S^n) = \text{secat}(\varepsilon) \leq 1 + \frac{n}{n} = 2$

Ejercicio: Construir un sistema de 3 planeadores locales eficientes en $S^1, S^2, \dots$

Óptima para n par pues $2 = TC(S^n) \leq TC^S(S^n) \leq 2$

<u>Proposición</u> (Farber-Grant, 2008)

$$TC^S(S^n) = 2 \quad \forall n.$$

<u>Dem</u>

Basta ver que $TC^S(S^n) \geq 2$

ie $\quad \operatorname{secat}\left(L^0(S^n) \xrightarrow{\varepsilon} B(S^n, \mathbb{Z}) \right) \geq 1$

Farber-Grant lo prueban observando que ε induce un morfismo en $H^*(\ ; \mathbb{Z}/2)$ con núcleo no trivial. Para lo cual usan de manera crítica la descripción de Heafliger de $H^*(B(M,2); \mathbb{Z}/2)$. El cálculo es algo técnico. Aquí damos un argumento elemental (sugerido por Peter Landweber):

Supóngase la existencia de una sección s como en el diagrama siguiente, y considérese la correspondiente sección "pullbackeada" σ (que es $\mathbb{Z}/2$-equivariante):

$$\begin{tikzcd}
(S^n)^{[0,1]} \arrow[d, "e"'] & L(S^n)^c \arrow[l, hook'] \arrow[r] \arrow[d, "e"'] & L^0(S^n) \arrow[d] \\
S^n \times S^n & F(S^n,2) \arrow[l, hook'] \arrow[r] \arrow[u, bend right, "\sigma"'] & B(S^n,2) \arrow[u, bend right, "s"']
\end{tikzcd}$$

Se tiene la composición

$$S^n \xhookrightarrow{i} F(S^n,2) \xrightarrow{\sigma} L(S^n)^c \hookrightarrow (S^n)^{[0,1]}$$

cuya adjunta es una homotopía $H : S^n \times [0,1] \to S^n$ que satisface:

$$\left.\begin{aligned} H(x,0) &= x \\ H(x,1) &= x \end{aligned}\right\} \quad \therefore \ n \text{ es impar}$$

y

$$\left.\begin{aligned} H(x,t) &= \sigma(x,-x)(t) \\ H(-x,1-t) &= \sigma(-x,x)(1-t) \end{aligned}\right\}\Big)$$

En particular $H(x,\tfrac{1}{2}) = H(-x,\tfrac{1}{2})$, así que $H(-,\tfrac{1}{2}) : S^n \to S^n$ factoriza como

$$
\begin{tikzcd}
S^n \arrow[rr, "{H(-,1/2)}"] \arrow[dr, "\text{proy}"'] & & S^n \\
& P^n \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Pero como n es impar $S^n \xrightarrow{\text{proy}} P^n$ tiene grado par en la celda máxima, de modo que $H(-;1/2)$ tendría grado par. Imposible pues $H(-;1/2) \simeq H(-;0) = Id$.

$\blacksquare$