Breve introducción a la Geometría Algebraica

Pedro Luis del Angel Rodríguez
CIMAT
Apdo. Postal 402
36240. Guanajuato, Gto.
México

luis@cimat.mx

Introducción

El hombre siempre ha querido entender el mundo, explorándolo desde diversos puntos de vista. Una de las primeras herramientas que desarrolló para el estudio de su universo fue la geometría, que surgió en culturas tan antiguas como la Babilónica y la China y se consolidó en la Grecia antigua, especialmente a partir del enorme esfuerzo de Euclides por sistematizar todos los conocimientos geométricos de su tiempo.

Durante muchos siglos, el estudio de la geometría se realizó con las mismas técnicas utilizadas por los matemáticos de la Grecia antigua y en la práctica sus mayores logros habían sido la clasificación de las curvas llamadas cónicas (círculos, elípses, hipérbolas y parábolas), junto con los teoremas de Tales de Mileto y de Pitágoras y algunos teoremas de lo que hoy llamamos la Geometría Proyectiva.

No sería sino hasta el siglo XVII, cuando Descartes introduce el sistema de coordenadas, que los geómetras descubren el poder del álgebra para el estudio de los objetos geométricos, dando lugar al surgimiento de la Geometría Algebraica. De entonces a la fecha nuestros conocimientos geométricos se han multiplicado, las técnicas se han perfeccionado y se han ido incorporando nuevas herramientas al estudio de la Geometría, como el análisis, la variable compleja y la topología.

1. Primera lección

Recordemos que los griegos tenían un amplio conocimiento de la geometría plana y del espacio. Tales de Mileto organizó estos conocimientos, dividiéndolos en un grupo de conocimientos .[el]ementales.[ei]ndiscutibles, llamados axiomas, y deduciendo a partir de estos, mediante procedimientos lógicos, todos los demás resultados conocidos en su época. No fue una tarea fácil, pues debió descartar demostraciones circulares y buscar siempre el camino más simple.

A continuación hacemos un breve resumen de los conocimientos griegos sobre la geometría plana, formulados en el lenguaje moderno, a la manera de Hilbert:

- Dados dos puntos distintos existe una única recta que los contiene y toda recta contiene al menos dos puntos distintos.
- Dados dos puntos en una recta, existe al menos un punto que está entre los dos primeros, distinto de ambos. Es decir, toda recta tiene de hecho un número infinito de puntos y estos están ordenados.
- Dos puntos en una recta definen un segmento y dados dos segmentos siempre es posible compararlos.
- Dados tres puntos no colineales existe un único plano que los contiene y todo plano contiene al menos tres puntos distintos.
- Existen al menos tres puntos distintos.
- Dada una recta y un punto (sobre la recta o fuera de ella) existe una única recta perpedicular a la primera y que pasa por el punto dado.
- Dada una recta y un punto fuera de ella *existe una única recta* paralela a la primera y que pasa por el punto dado. Este es el famoso **axioma de las paralelas**.
- Tres puntos no colineales definen un triángulo. Dos triángulos son *congruentes* si tienen todos sus lados y sus ángulos iguales.
- De hecho, dos triángulos que satisfacen los criterios de Lado - Ángulo -Lado, o Ángulo -Lado-Ángulo, o Lado-Lado-Lado, son congruentes.
- Dos triángulos son *semejantes* si todos sus ángulos son iguales.
- (Teorema de Tales) Dados dos triángulos semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales.
- (Teorema de Pitágoras) Si en un triángulo dos de sus lados son perpendiculares entre si, diremos que es un *triángulo rectángulo*. El lado opuesto al ángulo recto de dicho triángulo se llama *hipotenusa* y los otros dos lados se llaman *catetos*. En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

- Si cortamos un cono con un plano, la sección que obtenemos sólo puede ser una recta "tangente.ªl cono, dos rectas, un círculo, una elipse, una parábola o una hipérbola. Más aún, conocían las descripciones de las *cónicas* en términos de distancias.

René Descartes (1596-1650), en el curso de sus estudios de geometría, realizó un descubrimiento fundamental, a partir de los conocimientos legados a nosotros por los griegos: Dado un plano y un punto O en el plano, al que en adelante llamaremos el *origen*, siempre existen dos rectas x e y (llamadas ejes) perpendiculares entre si que se cortan precisamente en ese punto. Si tomamos un segundo punto P en el plano, existe una única recta que pasa por P y es perpendicular a la recta x y también existe una única recta que pasa por P y es perpendicular a la recta y. Si denotamos por x_0 e y_0 a los puntos donde estas perpendiculares intersectan a las rectas x e y respectivamente (llamados las proyecciones de P sobre los ejes), entonces x_0 e y_0 determinan de manera unívoca al punto P y viceversa. Más aún, los puntos x_0 e y_0 determinan, junto con el punto O, segmentos de recta que seguiremos denotando mediante x_0 e y_0; de esta manera, todo punto en el plano se puede describir mediante dos çoordenadas", a saber, los segmentos x_0 e y_0.

Al designar mediante letras a los puntos, las rectas y los segmentos determinados de esta forma, Descartes es capaz, por primera vez en la historia de la humanidad, de formular, en lenguaje algebraico, los conocimientos adquiridos por los griegos, así por ejemplo, el teorema de Pitágoras aplicado al punto P, nos permite formular la distancia del punto P al origen O en términos de los segmentos x_0 e y_0.

Si consideramos ahora una recta arbitraria en el plano y tomamos tres puntos en esta recta, las correspondientes proyecciones sobre los ejes determinan triángulos semejantes. Al escribir el teorema de Tales en términos de los segmentos correspondientes (i.e., en términos de los catetos e hipotensas de estos triángulos semejantes), obtenemos de manera inmediata la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y a partir de ésta podemos deducir todas las otras fórmulas que nos son familiares para describir una recta. De hecho es posible demostrar que toda recta se puede describir mediante una ecuación de grado uno en dos variables y recíprocamente, toda ecuación de grado uno en dos variables describe una recta.

De manera análoga, un círculo de radio r y con centro en $p = (x_o, y_0)$ se describe mediante la ecuación

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Puesto que todas las cónicas planas se pueden describir en términos de que ciertas distancias sean iguales (o que ciertas sumas o diferencias de distancias sean constantes), si planteamos estas relaciones entre las distancias en términos de las proyecciones x_0 e y_0 asociadas a un punto cualquiera P sobre la cónica en cuestión, no es tan sorprendente que todas ellas admitan una descripción algebraica mediante ecuaciones de segundo grado. Más interesante es el hecho de que todo polinomio de grado dos en dos variables, que no sea el producto de dos polinomios de grado uno, describa a una cónica plana.

Una vez obtenida una descripción algebraica mediante ecuaciones de primer grado para cualquier recta en el plano y habiendo recuperado la clasificación de las cónicas en trminos de ecuaciones de grado dos en dos variables, se abre por primera vez la posibilidad de preguntarnos **¿qué sucede con las curvas descritas mediante polinomios de grado mayor que dos?** Esta pregunta era impensable en la época de los griegos ¡sencillamente porque no se había asociado ninguna expresión algebraica ni a las rectas ni a las cónicas!

Ejemplo 1.1 *Considere un polinomio de la forma*

$$p(x,y) = a_1x^3 + a_2y^3 + a_3x^2y + a_4xy^2 + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7xy + a_8x + a_9y + a_{10}.$$

¿Cuál será el lugar geométrico de los puntos del plano $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $p(x,y) = 0$?

Es posible demostrar que si el polinomio anterior es irreducible, es decir, si no se puede escribir como el producto de un polinomio de grado dos por un polinomio de grado uno; entonces con un cambio de coordenadas conveniente, de la forma $x = \alpha x' + \beta y'$ e $y = \gamma x' + \delta y'$, la ecuación anterior se transforma en una ecuación de la forma

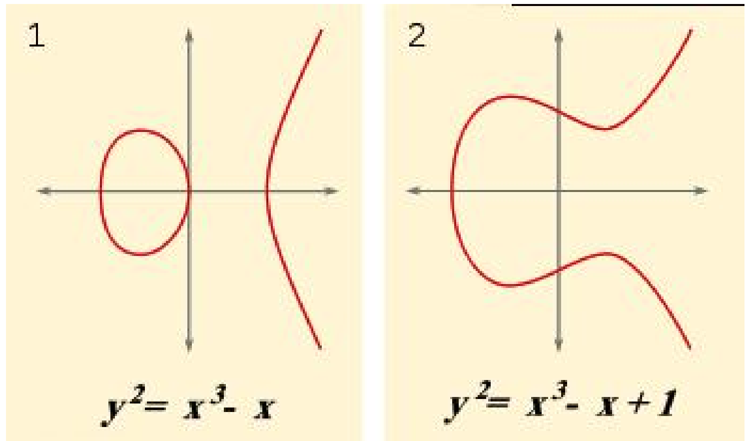
$$y^2 + b_1xyy + b_3y = x^3 + b_2x^2 + b_4x + b_6, \tag{1.1}$$

la cual, después de reemplazar a y por $\frac{1}{2}(y - b_1x - b_3)$, se transforma a su vez en una ecuación de la forma

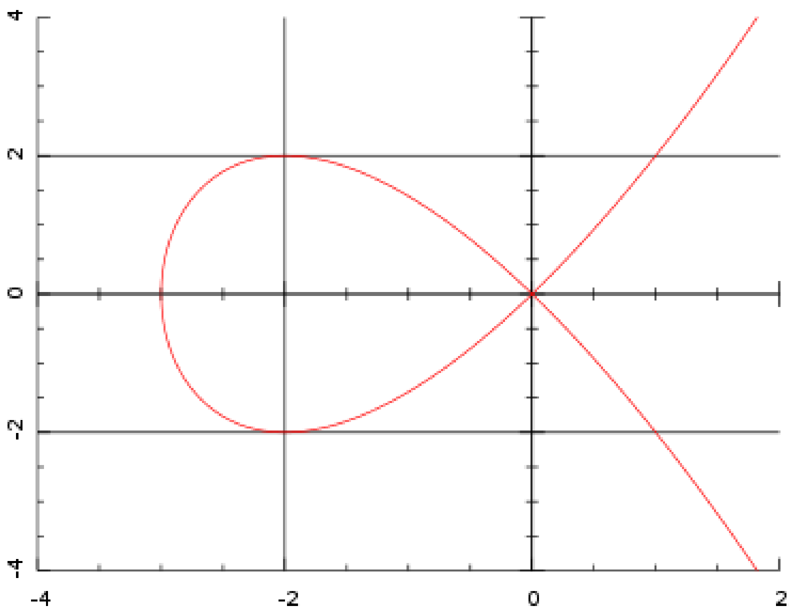
$$y^2 = 4x^3 + c_2x^2 + 2c_4x + c_6. \tag{1.2}$$

En el caso particular en el que el polinomio $4x^3 + c_2x^2 + 2c_4x + c_6$ tiene tres raíces reales, por ejemplo en la ecuación $y^2 = x(x-1)(x-2)$. ¿cómo se ve esta curva? ¿ y cómo se ve esta curva cuando dicho polinomio tiene sólo una raíz real?

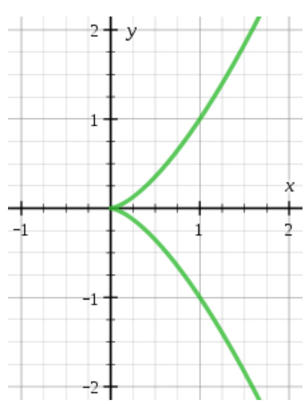
En las figuras siguientes se ilustra la curva que corresponde a esta ecuación, dependiendo de si el polinomio $4x^3 + c_2x^2 + 2c_4x + c_6$ tiene tres raices reales distintas, una raíz real y dos raíces complejas distintas, dos raíces reales distintas (una de ellas con multiplicidad dos) o una raíz real de multiplicidad tres.



Izquierda: Tres raíces reales. Derecha: Una raíz real



Una raíz real de multiplicidad dos.

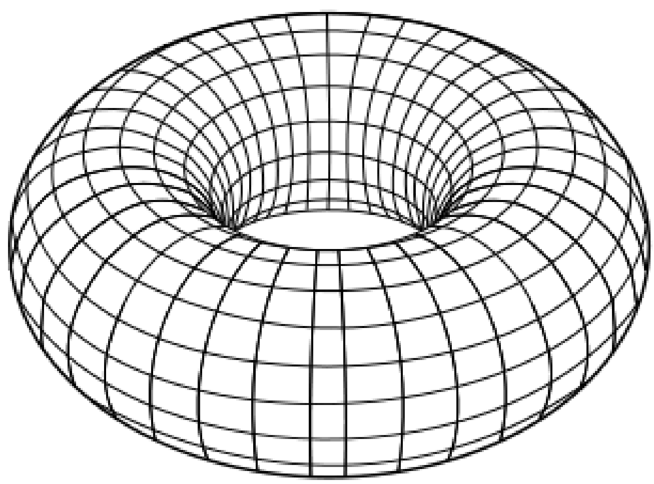


Una raíz real de multiplicidad tres.

De este modo, la descripción de las curvas planas reales definidas mediante un polinomio de grado tres es muy sencilla: O bien es una de las curvas ilustradas en las figuras anteriores, o bien es una cónica y una recta (si el polinomio de grado tres es el producto de un polinomio irreducible de grado dos y uno de grado uno), o bien son tres rectas (cuando el polinomio de grado tres sea el producto de tres polinomios de grado uno).

En el ejemplo precedente es evidente que para ciertos intervalos (en particular para valores negativos de x) no existen puntos sobre la curva, porque no existen las raíces reales de números negativos. Sin embargo, en el siglo XVI, Cardano y Tartaglia ya habían admitido la necesidad de considerar números donde las raíces cuadradas de los números negativos si existieran, lo que hoy conocemos como los números complejos, para poder resolver cualquier ecuación de grado dos o tres, con coeficientes reales, en una sola variable. Así , las preguntas sobre la clasificación de las cónicas y la clasificación de las curvas de grado tres puede formularse no sólo en el plano real $\mathbb{R}^2$, sino también en el plano complejo $\mathbb{C}^2$.

Ejemplo 1.2 *Considere la "curva"descrita mediante la ecuación* $y^2 = x(x-1)(x-2)$*. ¿cómo se ve esta curva si admitimos números complejos?*



"Curva" compleja $y^2 = x(x-1)(x-2)$.

No debe asombrarnos que ambas clasificaciones sean mucho más sencillas en el plano complejo que en el plano real. La razón es simple: Todos los números complejos se pueden escribir como cuadrados de otro número complejo, lo cuál no es cierto en el caso de los números reales; de este modo, la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se puede escribir como $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(ib)^2} = 1$.

Para completar el cuadro, dentro de los muchos infructuosos intentos para demostrar el axioma de las paralelas a partir de los otros axiomas se habían considerado algunos ejemplos ."extraños", con geometrías en las que sólo existía un número finito de puntos en cada plano, por ejemplo, el plano con cuatro puntos, en el que por definición dos puntos distintos forman una recta y toda recta consta precisamente de dos puntos. Hacia 1899, David Hilbert (1862-1943) reescribió los axiomas de la Geometría de Euclides, en un lenguaje modernos y rellenando algunas lagunas lógicas presentes en la formulación original. En su *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert demuestra que todo plano desarguesiano es equivalente a un plano de la forma R^2, con R un anillo de división. Más aún, demuestra que si el plano es desarguesiano y satisface el teorema Pappus, entonces el anillo R de hecho es conmutativo y por tanto es un campo, es decir, todo plano de Pappus y desarguesiano es de la forma K^2, con K un campo.

¿Qué se puede decir acerca de las curvas descritas mediante polinomios de grado mayor o igual a tres en dos variables? ¿Qué se puede decir de los objetos escritos mediante polinomios en tres o más variables?

La geometría algebraica estudia objetos geométricos, llamados variedades algebraicas, definidos a través de polinomios, asociándoles objetos de naturaleza algebraica (anillos, grupos, espacios vectoriales, etcétera), a partir de los cuales se espera poder obtener información sobre la variedad analizada.

2. Segunda lección.

Hemos visto que todo plano desarguesiano es de la forma R^2, con R un anillo de división y que si el plano satisface el teorema de Pappus, entonces R es de hecho un campo. Resulta entonces natural estudiar las curvas en un plano de la forma K^2. Si el campo K no es algebraicamente cerrado, se pueden presentar situaciones bastante extrañas

Ejemplo 2.1 *Considere al conjunto* $V(x^2+y^2) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=0\}$

Claramente este conjunto se reduce a un único punto, el punto $(0,0)$. Sin embargo, si consideramos los ceros de este polinomio en $\mathbb{C}^2$, entonces X es la unión de dos rectas, pues $x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)$. En el caso de campos finitos $\mathbb{F}_q$ la situación es aún más extraa, pues no importa cuál se el polinomio $f \in \mathbb{F}_q[x,y]$, el conjunto

$$V(x^2+y^2) := \{(x,y) \in \mathbb{F}_q^2 \mid f(x,y)=0\}$$

es un conjunto finito (que podría ser vacío). EN esta lección, consideraremos únicamente campos algebraicamente cerrados para evitar estos fen
'omenos.

Definición 2.2 *Dado un campo algebraicamente cerrado* $\mathbf{K}$ *y un polinomio* $f \in \mathbf{K}[x,y,z]$, *al conjunto*

$$X := V(f) = \{(x,y,z) \in \mathbf{K}^3 \mid f(x,y,z)=0\}$$

de ceros de f *lo llamaremos una superficie afín.*

Ejemplo 2.3 *Si* $f(x,y,z)=ax+by+cz$, *entonces la superficie afín* $X=V(f)$ *es un plano en* $\mathbf{K}^3$.

Ejemplo 2.4 *Si $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$, entonces la superficie afín $X=V(f)$ es un cono en $\mathbf{K}^3$, con vértice en el origen. ?'Qué sucede si intersectamos este cono con un plano $H=V(ax+by+cz)$? digamos si $a\neq 0$.*

$$
\begin{aligned}
X\cap H &= \{(x,y,z)\in\mathbf{K}^3 \mid ax+by+cz=0=x^2+y^2-z^2\}\\
&= \{(x,y,z)\in\mathbf{K}^3 \mid 0=\tfrac{1}{a^2}(-by-cz)^2+y^2-z^2\}
\end{aligned}
$$

que es una cónica.

Más generalmente, si intersectamos dos superficies, esperamos obtener una curva y si intersectamos tres superficies, esperamos obtener una colección finita de puntos, aunque en ocasiones hay sorpresas.

Ejemplo 2.5 *Considere las superficies $S=V(xw-y)\subset\mathbf{K}^3$ e $Y=V(y^2-x)\subset\mathbf{K}^3$; entonces $P=(x,y,w)\in X\cap Y$ si y s'olo si sus coordenadas satisfacen las ecuaciones $y=xw$ y $x^2w^2-x=0$, si y sólo si $y=xw$ y $x(xw^2-1)=0$ si y sólo si $P=(0,0,w)$ ó $P=(x,xw,w)$ con $xw^2=1$. En particular, si $xw^2=1$, entonces $w\neq 0$ y por tanto $X\cap Y$ es la unión de la recta $(0,0,w)$ y de la curva $(\frac{1}{w^2},\frac{1}{w},w)$, con $w\neq 0$.*

Nos gustaría tener condiciones para que la intersección de dos superficies fuera en verdad una curva y no una unión de curvas distintas. Esto lo estudiaremos más adelante.

Más generalmente, al conjunto $\mathbf{K}^n$ lo llamaremos el *espacio afín* de dimensión n y lo denotaremos mediante $\mathbb{A}^n$. A los puntos del espacio afín los denotaremos mediante $p=(x_1,\ldots,x_n)$ y a las diferentes x_i las llamaremos las coordenadas afines del punto p [1] En esta lección nos interesaremos exclusivamente en variedades definidas sobre el campo $\mathbf{K}=\mathbb{C}$.

Un subconjunto X de un espacio afín $\mathbb{A}^n$ se llamará un *conjunto algebraico* si existen polinomios $f_1,\ldots,f_s$, en n variables, tales que X es el conjunto de ceros comunes de dichos polinomios. En tal caso escribiremos $X=V(f_1,\ldots,f_s)$.

Ejemplo 2.6 *El espacio afín $\mathbb{A}^n$ es un conjunto algebraico, pues sus puntos son los ceros del polinomio constante cero. Análogamente el conjunto vacío es un conjunto algebraico, pues es el conjunto de ceros del polinomio constante 1.*

Ejemplo 2.7 *Toda colección finita de puntos en $\mathbb{A}^1$ es un conjunto algebraico, pues es posible construir un polinomio en una variable que tiene precisamente a esos puntos como raíces simples.*
Observe que, sobre el campo de los números complejos, con la topología usual, todo subconjunto algebraico de $\mathbb{A}^1$ distinto de un punto, el vacío ó el total; será un conjunto no conexo.

[1] El nombre de espacio afín proviene del hecho de que existe una construcción axiomática para tales espacios, inspirada en la definición de espacio vectorial de dimensión n sobre el campo $\mathbf{K}$. Una vez fijado un sistema de coordenadas (y en particular un origen), existe una identificación natural de los espacios así obtenidos con el espacio $\mathbf{K}^n$.

Ejemplo 2.8 *Si $X \subset \mathbb{A}^2$ es el conjunto de ceros del polinomio $f(x, y) = xy$, entonces X es de hecho la unión de los ejes coordenados, pues $xy = 0$ si $x = 0$ ó bien si $y = 0$. X es, por definición, un conjunto algebraico.*

Ejemplo 2.9 *Toda cónica, siendo el conjunto de ceros de un polinomio de grado 2, es un conjunto algebraico.*

Ejemplo 2.10 *El conjunto de ceros del polinomio $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es un conjunto algebraico.*

Ejemplo 2.11 *El conjunto de ceros del polinomio $ax + by + cz + dw$ es un subconjunto algebraico del espacio afín $\mathbb{A}^4$.*

Observación. Si la variedad $X = V(f_1, \cdots, f_k) \subset \mathbb{A}^n$ está definida sobre los números complejos (o sobre los reales), entonces X es de hecho un conjunto cerrado, pues es imagen inversa del cero bajo la función continua $F : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^k$ dada por $F = (f_1, \cdots, f_k)$.

Algunos de los ejemplos anteriores sugieren que necesitamos refinar nuestra definición, si deseamos considerar únicamente objetos que "constan de una sola pieza", pues para estudiar conjuntos algebraicos que constan de más de una pieza (por ejemplo, una ̧onica y una recta), es suficiente con estudiar cada pieza por separado.

En general, dado un conjunto algebraico $X \subset \mathbb{A}^n$, es posible encontrar varias colecciones de polinomios que definan a X; sin embargo, es posible asociarle un ideal único, el cual denotamos por $I(X)$, que consiste de todos los polinomios que se anulan en X.

Ejemplo 2.12 *Considere al conjunto algebraico $X = V(x)$, claramente también se cumple $X = V(x^2) = V(x^3)$, sin embargo, $I(X) = (x)$.*

Diremos que $X \subset \mathbb{A}^n$ es una *variedad afín* si el ideal $I(X)$ es un ideal primo.

Ejemplo 2.13 *Sea $X = V(x^2 - 2xy + y^2) \subset A^2$. El ideal $(x^2 - 2x + y^2)$ generado por $x^2 - 2x + y^2$ no es un ideal primo, porque $x^2 - 2x + y^2 = (x - y)^2$, sin embargo, $I(X) = (x - y)$ si es un ideal primo, de modo que X es una variedad afín.*

Ejemplo 2.14 *Sea $X = V(x^2, xy, y^3, x - y)$, entonces $I(X) = (x, y)$, que es un ideal primo y por tanto X es una variedad.*

Ejemplo 2.15 *Toda cónica plana que no sea la unión de dos rectas ni una recta doble es, de hecho, una variedad, pues el ideal $(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f)$ es un ideal primo si y sólo si el polinomio $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ es irreducible, si y sólo si no es el producto de dos polinomios de grado uno.*

Observación Si $J = (f_1, \cdots, f_k)$, entonces $V(f_1, \cdots, f_k) = V(J)$. De hecho, si $S \subset \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ y $J = (S)$ es el ideal generado por S, entonces $V(S) = V(J)$. Más aún, todo ideal en $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ es finitamente generado (Noether), por tanto nuestra definición de conjunto algebraico y de variedad es suficientemente general.

En general se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.16 *Si $X = V(J)$, con J un ideal*

Por diversas razones resulta conveniente considerar otro tipo de espacios además de los espacios afines: los espacios proyectivos. En la literatura se encuentran muchas motivaciones para definir estos espacios, por lo que remitimos al lector interesado en ellas a las obras [1], [7] y [11].

Definición 2.17 *En el espacio $\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}$ introducimos una relación de equivalencia como sigue: $p \cong q$ si existe un elemento $\alpha \in k - \{0\}$ tal que $p = \alpha q$. Es decir, identificamos a todos los elementos de cualquier recta que pase por el origen con un punto cualquiera, distinto de cero, de dicha recta. Al espacio cociente le llamamos el espacio proyectivo de dimensión n y lo denotamos mediante $\mathbb{P}^n$; es decir,*

$$\mathbb{P}^n := (\mathbb{A}^n - \{0\})/ \cong .$$

Si $p \in \mathbb{P}^n$, escribimos $p = (x_0 : \cdots : x_n)$ y a las distintas x_i las llamamos las coordenadas proyectivas de p. Observe que las coordenadas proyectivas de un punto p no son únicas, sin embargo las razones entre ellas si lo son, de ahí la notación.

Definición 2.18 *$\mathbb{A}^1$ y $\mathbb{P}^1$ son llamados la recta afín y la recta proyectiva, respectivamente; del mismo modo, $\mathbb{A}^2$ y $\mathbb{P}^2$ se llaman el plano afín y el plano proyectivo.*
Observe que hay una inclusión natural de $\mathbb{A}^1$ en $\mathbb{P}^1$ dada por $z \mapsto (z : 1)$. La imagen de esta inclusión es casi toda la recta proyectiva, salvo por el punto $(1 : 0)$ al cual llamaremos el punto al infinito de la recta proyectiva.

Más generalmente, si U_i denota al abierto de $\mathbb{P}^n$ dado por $x_i \neq 0$, entonces exite una identificación $\mathbb{A}^n \to U_i$ dada a través de $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1 : \cdots : z_{i-1} : 1 : z_i : \cdots : z_n)$. La aplicación inversa $U_i \to \mathbb{A}^n$ está dada por $(x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i)$.

Análogamente a como se definió un conjunto algebraico en el espacio afín, diremos que un subconjunto $X \subset \mathbb{P}^n$ es un *conjunto algebraico* si es el conjunto de ceros comunes de una colección $\{f_1, \ldots, f_s\}$ de polinomios *homogéneos*, en tal caso escribiremos $X = V(f_1, \ldots, f_s)$. Observe que si los polinomios no son homogéneos no tiene sentido hablar de sus ceros, ya que el valor que toman estos dependen del representante elegido.

Diremos que un conjunto algebraico $X \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad proyectiva si el ideal $I(X)$ generado por los polinomios homogéneos que se anulan en X es un ideal primo.

Ejemplo 2.19 *Sea $X = V(x^2 + y^2) \subset \mathbb{P}^1$ definida sobre los números complejos. Entonces X es un conjunto algebraico pero no es una variedad proyectiva, porque en los complejos $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$, de modo que el ideal $I(X) = ((x + iy)(x - iy))$ no es un ideal primo.*

Si la variedad X está definida a través de un sólo polinomio irreducible, diremos que X es una *hipersuperficie*. Si el grado del polinomio que define a X es uno, entonces diremos que X es un *hiperplano*.

Observación. Si la variedad X está definida sobre los números complejos (o sobre los reales), los conjuntos algebraicos son de hecho conjuntos cerrados, pues son imagen inversa de un punto ante una función continua. Así, resulta natural hacer la siguiente definición.

Definición 2.20 *Sea X una variedad algebraica definida sobre un campo $\mathbf{K}$. Definimos a los subconjuntos cerrados de X como los conjuntos algebraicos. Los subconjuntos abiertos de X serán entonces los complementos de los conjuntos algebraicos.*

Es fácil ver que, con esta definición, los conjuntos abiertos definen una topología en X, a la que se le conoce como la *topología de Zariski*.

Bibliografía

[1] Coxeter, H.S.M. *Projective Geometry*, Toronto University Press (1974).

[2] Danilov, Shokurov. *Algebraic curves, algebraic manifolds and schemes*, Springer (1998).

[3] Griffiths, Harris. *Principles of algebraic geometry*, Wiley Interscience (1978).

[4] Gunning, R.C. *Lectures on Riemann surfaces*, Princeton Math. Notes, Princeton U. Press (1966).

[5] Harris, J. *Algebraic Geometry*, GTM 133, Springer (1992).

[6] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*, GTM 52, Springer (1977).

[7] Hartshorne, R. *Foundations of Projective Geometry*, Mathematical Lecture Notes Series, W. A. Benjamin inc. (1967).

[8] Husemoller, D. *Fibre Bundles*, GTM 20, Springer (1966).

[9] Iitaka, Sh. *Algebraic Geometry*, GTM 76, Springer (1982).

[10] Okonek Chr., Schneider M., Spindler H. *Vector Bundles on Complex Projective Spaces*, Progress in Math. 3, Birkhäuser (1980).

[11] Shafarevich, I.R. *Basic Algebraic geometry*, Grundlehren 213, Springer (1974).

[12] Samuel, P. *Projective Geometry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer (1988).